La résolution de l'équation Stream shelves dans Grisli

- L'équation des ice streams et ice shelves est celle de Mac Ayeal (1989).

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} \left(2\,\bar\eta\,H\;(2\;\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\bar\eta\,H\;(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}) \right) = \rho g H\;\frac{\partial S}{\partial x} - \tau_{bx} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(2\,\bar\eta\,H\;(2\;\frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_x}{\partial x}) \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\bar\eta\,H\;(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}) \right) = \rho g H\;\frac{\partial S}{\partial y} - \tau_{by} \end{array} \right.$$

où $\bar\eta\,H$ est la viscosité intégrée sur la verticale.

Sous une forme discrétisée en différences finies (ordre 1), cela devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum\limits_{i_l,j_l} Tu(i,j,i_l,j_l)\;ux(i+i_l,j+j_l) + \sum\limits_{i_l,j_l} Tv(i,j,i_l,j_l)\;uy(i+i_l,j+j_l) = opposx(i,j) \\ \sum\limits_{i_l,j_l} Su(i,j,i_l,j_l)\;ux(i+i_l,j+j_l) + \sum\limits_{i_1,j_l} Sv(i,j,i_l,j_l)\;uy(i+i_l,j+j_l) = opposy(i,j) \\ i_l = -1,0,1 \qquad j_l = -1,0,1 \end{array} \right.$$

Pour un i,j donné, les Tu, Tv sont les divers élément non-nuls de la ligne qui régit l'équation en $U_x(i,j)$. Idem pour Su et Sv et l'équation en $U_y(i,j)$.

Remarque : les vitesses sont soit notées U, V soit u_x et u_y.

$Pvi = \bar\eta H$ est la viscosité intégrée sur l'épaisseur sur les noeuds majeurs, Pvm sur les noeuds au milieu des mailles (voir figure grille U ou V)

Une fois discrétisées, les termes Tu,... donnent :

$terme\ U_{i,j}$ $\quad Tu(i,j,0,0) = -4\ [Pvi(i,j) + Pvi(i-1,j)]$

$$- [Pvm(i,j) + Pvm(i,j+1)] - frot_{mx}\ \Delta x^2$$

$terme\ U_{i+1,j}$ $\quad Tu(i,j,1,0) = \ 4\ Pvi(i,j)$
$terme\ U_{i-1,j}$ $\quad Tu(i,j,-1,0) = \ 4\ Pvi(i-1,j)$
$terme\ U_{i,j+1}$ $\quad Tu(i,j,0,1) = \ Pvm(i,j+1)$
$terme\ U_{i,j-1}$ $\quad Tu(i,j,0,-1) = \ Pvm(i,j)$

$terme\ V_{i,j}$ $\quad Tv(i,j,0,0) = \ -2\ Pvi(i,j) - \ Pvm(i,j)$
$terme\ V_{i-1,j}$ $\quad Tv(i,j,-1,0) = \ 2\ Pvi(i-1,j) + \ Pvm(i,j)$
$terme\ V_{i,j+1}$ $\quad Tv(i,j,0,1) = \ 2\ Pvi(i,j) + \ Pvm(i,j+1)$
$terme\ V_{i-1,j+1}$ $\quad Tv(i,j,-1,1) = \ -2\ Pvi(i-1,j) - \ Pvm(i,j)$

$vecteur$ $\quad opposx(i,j) = \ \rho\ g\ Hmx(i,j)\ Sdx(i,j) \Delta\ x^2$

$\beta_{mx} = -frotmx(i,j)\ U_{i,j}$

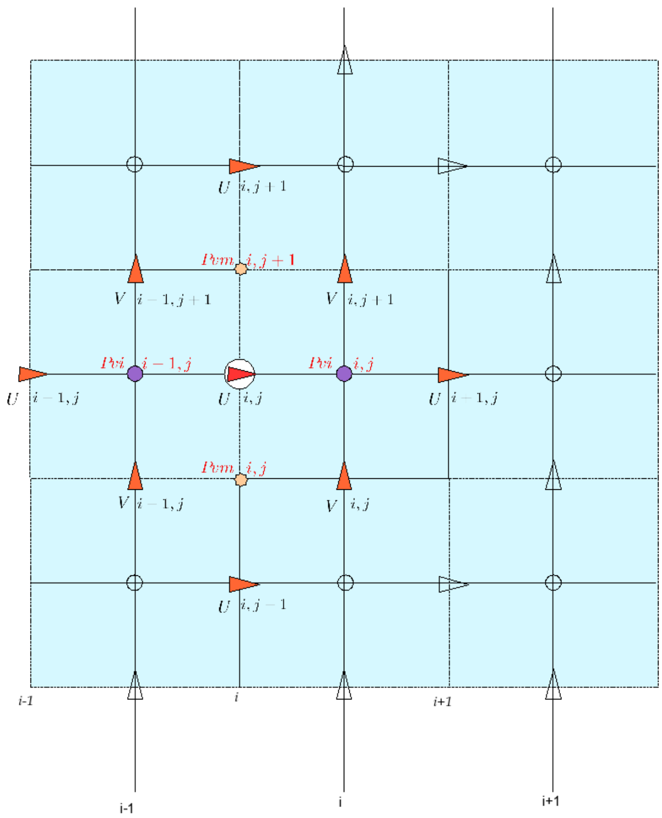
Pour la vitesse V, les termes se déduisent par permutation entre x et y (i et j).

Pour mieux conditionner la matrice, tous les termes sont ensuite divisés par Tu(i,j,0,0) (ou Sv(i,j,0,0)) de façon à avoir 1 sur la diagonale.

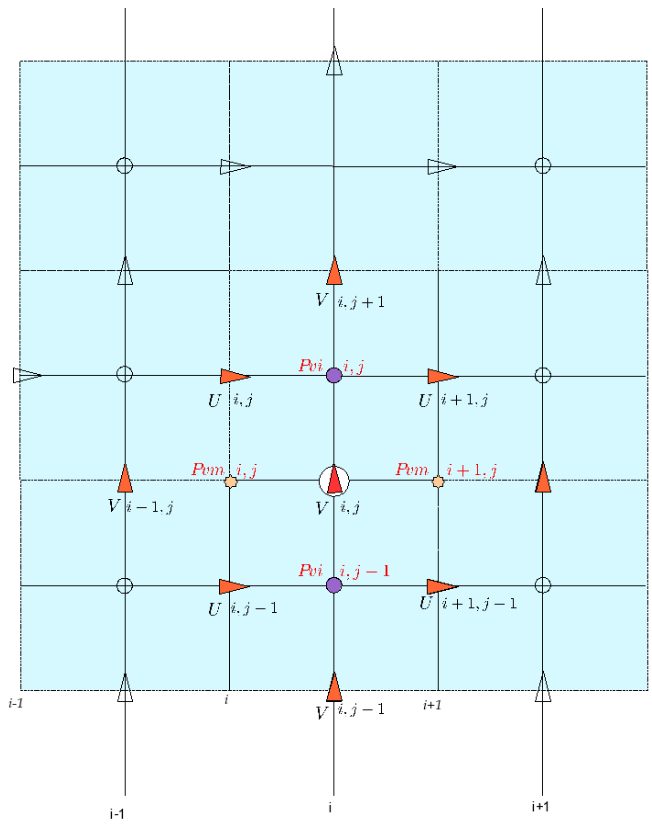
Les grilles alternées

Le noeud cerclé de blanc est celui sur lequel est appliqué l'équation.

Equation en U



Equation en V



Conditions aux limites

conditions limites shelf : no cisaillement

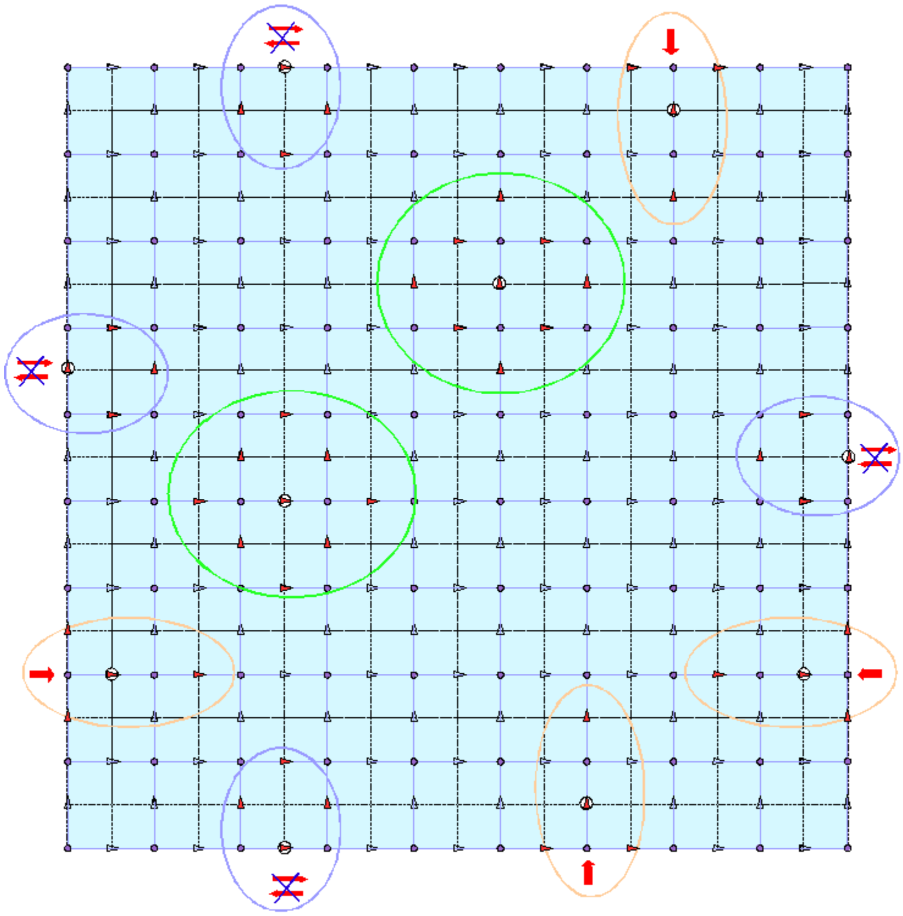
$\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)=0$ (en violet sur le dessin)

conditions limites shelf : pression.

Formulation générale valable aussi au bord des ice streams, d'où le frottement éventuel et le terme en B. Le max sert pour les situations où le socle est au dessus du niveau de la mer.
$(sealevel - B < 0)$

$2\bar{\eta}H\left(2\ \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=\rho g\frac{H^2}{2}-\rho_w g\frac{max(\ (sealevel-B),\ 0\ )^2}{2}-\tau_b$ (en orange sur le dessin)

Selon les bords la condition « non cisaillement » est appliquée pour la vitesse qui a effectivement un point sur le bord (U pour les bords Sud et Nord, V pour les bords Est et Ouest). La condition « pression » est appliquée pour l'autre vitesse.



Quand il n'y a pas de glace : pseudo ice shelf.

On suppose une épaisseur fictive de 1 m avec une valeur de viscosité très petite (Pvi_min). En fait l'équation de pression (limite) est une version intégrale de l'équation « standard » et théoriquement, cela revient au même d'imposer les conditions aux limites sur les bords du pseudo-ice shelf ou directement au vrai front. Cela semble aussi vrai en pratique comme l'ont montré des intercomparaisons de modèle. Par contre, c'est très pénalisant en terme de calcul si on garde tous ces points (voir plus loin « enlever les noeuds fantomes »).

Petite démonstration de l'équivalence « condition aux limites – pseudo ice shelf »

En analytique.

A 1 dimension et pour un ice shelf flottant sur son front. A cause de la flottaison on a les relations :

$S = H(1 - \frac{\rho}{\rho_w})$ et si le niveau des mers est 0 $B = -\frac{\rho}{\rho_w} H$

La condition aux limites en pression devient $4\,\bar{\eta} H\,\frac{\partial u}{\partial x} = \rho g \frac{H^2}{2}(1 - \frac{\rho}{\rho_w})$

l'équation du shelf en 1D devient :

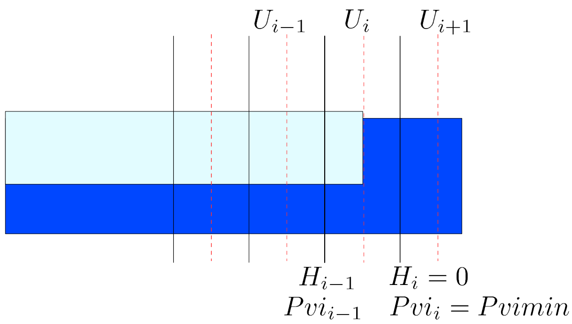
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(4\,\bar{\eta}\,H\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \rho g H\,\frac{\partial S}{\partial x} = \rho g H\,\frac{\partial H}{\partial x}(1 - \frac{\rho}{\rho_w})$$

En intégrant entre un point où l'épaisseur est nulle et un point de l'ice shelf où l'épaisseur est H on retombe bien sur la même équation que la condition aux limites.

La même chose en discrétisé,

en regardant un bord Est, on suppose que :
$H(i,j) = 0$ et $Pvi(i,j) = Pvi_{min} \approx 0$

L'équation standard en 1D devient
(les pvm sont nuls)



$$Tu(i,j,0,0) = -4\,[Pvi(i,j) + Pvi(i-1,j)] \approx -4\,Pvi(i-1,j)$$

$$Tu(i,j,-1,0) = 4\,Pvi(i-1,j)$$

$$Tu(i,j,1,0) = 4\,Pvi(i,j) \approx 0$$

$$opposx(i,j) = \rho\,g\,Hmx(i,j)\,Sdx(i,j)\Delta\,x^2$$

Finalement, l'équation peut s'écrire :

$$4\ Pvi(i-1)\,[U(i,j)-U(i-1,j)] = -\rho\ g\ Hmx(i,j)\ Sdx(i,j)\Delta x^2$$

en remarquant que $S(i-1,j) = -Sdx(i,j) * \Delta x$

on obtient :

$$4\ Pvi(i-1)\,[U(i,j)-U(i-1,j)] = \rho\ g\ Hmx(i,j)\ H(i-1,j)(1-\frac{\rho}{\rho_w})\ \Delta x$$

qui est exactement la condition pression si on considère que $Hmx(i,j) = H(i-1,j)$
C'est à dire comme sur le dessin, on suppose que l'ice shelf se coupe d'un coup. Dans le code, la variable Hmx_oppos est définie pour cela.

Le système à résoudre :

Matrice elliptique L2